Universidad Nacional de Ingeniería **11-02-06**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

CUARTA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
PARTE A : 5 PUNTOS (30 MINUTOS)

Apellidos y Nombres	Firma	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Problema 1

Marque la alternativa que considere correcta:

1. Aproxime $\int_0^1 x^4 dx$, aplicando la regla del rectángulo con h=0.1 :

   a) 0.1876 b) 0.1998 c) 0.1934 d) 0.2033 e) N.A.

   Solución:

   » x=0:0.1:1
   » f=x.^4
   » I=0.1/2*(f(1)+2*sum(f)+f(11))

   I =0.2033

   Respuesta : $\boxed{\text{d}}$

2. Al aproximar $\int_0^1 \left(x^3 + 3x^2 + x + 1\right)dx$, mediante el método de Simpson 3/8 con h=1/33, el error será:

   a) 0.0001 b) 0 c) 0.0023 d) 0.0032 e) N.A.

   Solución:

   El método de Simpson 1/3 es exacto para cualquier polinomio de grado 3, por lo tanto el error es 0.

   Respuesta : $\boxed{\text{b}}$

3. Sea la formula de cuadratura abierta: $\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{3h}{2}\left(f(x_2)+f(x_3)\right)$, la cual puede ser extendida a un numero de particiones “n” múltiplo de 3, las instrucciones en MATLAB para evaluar una integral entre ***a*** y ***b*** serán:

```
h=(b-a)/n
x=a:h:b
f=fun(x)
```

a) I=3/2*h*(sum(f(3:3:n-1))+sum(f(2:3:n)))
b) I=3/2*h*(sum(f(2:3:n-1))+sum(f(3:3:n)))
c) I=3/2*h*(sum(f(2:3:n))+sum(f(3:3:n-1)))
d) I=3/2*h*(sum(f(2:3:n-1))+sum(f(3:3:n+1)))
e) N.A.

Solución:

$$I=\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx+\int_{x_4}^{x_7} f(x)dx+\Lambda\ +\int_{x_{n-2}}^{x_{n+1}} f(x)dx$$
$$I=\frac{3}{2}h\left(f(x_2)+f(x_3)\right)+\frac{3}{2}h\left(f(x_5)+f(x_6)\right)+\Lambda\ +\frac{3}{2}h\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$
$$I=\frac{3}{2}h\left(f(x_2)+f(x_5)+\Lambda\ f(x_{n-1})\right)+\frac{3}{2}h\left(f(x_3)+f(x_6)+\Lambda\ f(x_n)\right)$$

Respuesta : $\boxed{b}$

4. Dado la velocidad vs tiempo para un cuerpo

t(s)	2	4	6	8	10	25
$v(m/s)$	0.166	0.55115	1.8299	6.0755	20.172	8137.5

Determine el mejor estimado para la distancia cubierta entre t=2s. y t=10s. usando la regla de Romberg basado en la regla trapezoidal .

a) 33.456 m
b) 36.877 m
c) 37.251 m
d) 81.350 m
e) N.A.

Procedimiento

h=8

I(h)=81.352

36.8768

I(h/2)=47.9956 33.45578667

33.6696

I(h/4)=37.2511

5. $\int_{5}^{10} f(x)dx$ es exactamente

a) $\int_{-1}^{1} f(2.5x+7.5)dx$

b) $2.5\int_{-1}^{1} f(2.5x+7.5)dx$

c) $5\int_{-1}^{1} f(5x+5)dx$

d) $5\int_{-1}^{1} (2.5x+7.5) f(x)dx$

e) N.A

6. El valor más cercano usando dos puntos de la cuadratura de Gauss para la integral $\int_{0.2}^{2.2} xe^{x}dx$ es:

a) 12.811

b) 11.807

c) 11.672

d) 14.633

e) N.A.

Procedimiento

Z= [0.5774 -0.5774]

W=[1 1]

f=inline('x.*exp(x)')

x= Z+1.2

I=sum(W.*f(x))

I= 11.6721

7. Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Determinar usando el método de Euler, el valor aproximado de y(1) y el error cometido. Considere h=1. Solución exacta $y(t) = e^{-2t}$

a)1 1.1353 $\boxed{\text{b) -1 1.1353}}$ c) 1.1 0.1353 d) -1 1.5 e) 1 1.3

Solución:

La solución exacta es y(1) = 0.135335283. Considerando h=1
y(0) = y_0 = 1
y(1) =y_1 = y_0 + hf(t,y_0) = 1 + 1 * (-2) = **-1**:
Luego |y_1 - y(1)| = **1.135335283**.

8. Considere la ecuación diferencial $y''+4ty'+2y^2 = 0$ con condiciones iniciales $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$ Con h = 0.1, utilizar el método de Euler para obtener una aproximación de y(0.2) e y'(0.2).

a) 0.5 -0.3 b) 0.33 -0.392 $\boxed{\text{c) 0.98 -0.392}}$ d) 0.33 0.392 e) 0. 68 -0.29

Solución:

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = -4tu_2 - 2u_1^2$$

U'=[u1',u2']$^{(1)}$ = [1 -0.2]
U'=[u1',u2']$^{(2)}$ = [0.98 -0.392]

Tenemos la solución y(0.2)=0.98 e y'(0.2)=-0.392

9. Demostrar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{t}y + t^2 e^t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

tiene solución única en el intervalo [1,2].

Solución:

$f(t,y)=\frac{2}{t}y+t^2e^t$ continua en su dominio, y como

$\left|f(t,y_1)-f(t,y_2)\right|=\left|\frac{2}{t}\right|\left|y_1-y_2\right|\leq 2\left|y_1-y_2\right|$

Donde la constante de Lipschitz L=2, luego se verifica que tiene solución única.

10. Dado la ecuación diferencial de tercer orden

$y'''+2y''-y'-2y=e^t$

haciendo $y=u_1$, $y'=u_2$, $y''=u_3$, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales equivalente es:

$\boxed{\text{a) } u_1'=u_2; u_2'=u_3; u_3'=e^t-2u_3+u_2+2u_1}$

b) $u_1'=u_1; u_2'=u_2; u_3'=e^t-2u_3+u_2+2u_1$

c) $u_1'=u_2; u_2'=u_3; u_3'=e^t-2u_2+u_1+2u_3$

d) $u_1'=u_2; u_2'=u_3; u_3'=e^t-2u_3-u_1+2u_2$

e) a y c

Solución:

$$u_1'=u_2$$

$$u_2'=u_3$$

$$u_3'=e^t-2u_3+u_2+2u_1$$

Los Profesores

Universidad Nacional de Ingeniería **17-12-05**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2005-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

CUARTA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
PARTE B : 15 PUNTOS (80 MINUTOS)

Problema 1

Encontrar la longitud de arco (***s***) de la curva $x = 3y^{3/2} - 1$ de $y = 0$ a $y = 4$:

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

a) Usando la regla de Simpson 1/3, con h=1/3.

b) Si la solución exacta es $\frac{8}{243}\left(82\sqrt{82} - 1\right)$, determine el error porcentual.

Solución

$$\frac{dx}{dy} = \frac{9}{2} y^{1/2}$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4} y}\; dy$$

a) h=1/3

y	f(y)
0	1.0000
0.3333	2.7839
0.6667	3.8079
1.0000	4.6098
1.3333	5.2915
1.6667	5.8949
2.0000	6.4420
2.3333	6.9462
2.6667	7.4162
3.0000	7.8581
3.3333	8.2765
3.6667	8.6747
4.0000	9.0554

I=h/3*(f(0)+4*f(1/3)+ 2*f(2/3)+ 4*f(1)+ 2*f(4/3)+ 4*f(5/3)+ 2*f(2)+ 4*f(7/3)+ 2*f(8/3)+4*f(3)+ 2*f(10/3)+ 4*f(11/3)+f(4))

I = 24.3993

b)

Ie = 24.4129

Error = 0.0136

Error_relativo = 0.0556 %

Problema 2

Para la siguiente integral

$$I= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} dx$$

a) Usando Cuadratura de Romberg , calcule una aproximación a I con al menos 7 cifras decimales exactas
b) Si el valor de la integral exacta es I= 0.32651185660259, ¿determine el error absoluto de la aproximación de Romberg?

Solución

a)
R=

0.2500000000000	0	0	0	0
0.30757418583506	0.32676558111341	0	0	0
0.32178599662091	0.32652326688286	0.32650711260082		0
0.32533085189797	0.32651247032366	0.32651175055305	0.32651182417134	

b)
Error= 3.243125573648698e-008

Problema 3

Una partícula ***P*** se mueve a lo largo del eje X de manera tal que su aceleración en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por $\alpha(t) = 8 - 4t + t^2$. Encuentre la posición $x(t)$ de la partícula al cabo de 2 segundos, suponiendo que inicialmente la partícula esta localizada en $x = 1$ y está viajando a una velocidad inicial de 1m/seg. Utilizar el método de Euler Modificado(RK2 de orden 2) para h=0.5. Encontrar el error cometido.

Solución:

La primera derivada de la posición nos da la velocidad y la segunda derivada la aceleración. De donde el problema de valor inicial sería

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 8 - 4t + t^2$$
$$x(0) = 1$$
$$x'(0) = 1$$

Resolviendo el sistema:

$$u_1' = u_2$$
$$u_2' = 8 - 4t + t^2$$
$$u_1(0) = 1$$
$$u_2(0) = 1$$

t_i	$x(t_i)$	$x'(t_i)$
0	1.0000	1.0000
0.5000	2.5000	4.5625
1.0000	5.5625	7.3750
1.5000	9.8750	9.6875
2.0000	**15.2500**	11.7500

La posición en t(2)=15.25.

Solución exacta $x(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 + t + 1$ x(2)=15

Error cometido = 0.25

Los Profesores